Estimación Bayesiana de parámetros en acústica submarina

Sergio Hernandez & Paul Teal
sergio.hernandez@mcs.vuw.ac.nz

Victoria University of Wellington
School of Mathematics, Statistics and Computer Science
November 2008

Procesamiento de señales basado en estadística

- Detección : El objetivo es decidir si hay señal presente o no.
- Estimación : El objetivo es decidir sobre los parámetros de las señales detectadas.

Acústica submarina

La señal recibida en $y_m(t)$ en el m-ésimo hidrófono corresponde a la suma de N señales provenientes de las fuentes $s_n(t)$ y la convolución con un filtro de respuesta finita $h_{m,n}(t)$. La señal resultante se considera contaminada con ruido blanco Gaussiano $w_m(t)$.

$$y_m(t) = \sum_{n=1}^{N} s_n(t) * h_{m,n}(t) + w_m(t) \tag{1}$$

El tiempo de retardo se calcula como:

$$\tau_{m,r_n} = \frac{||r^n - m_m||}{c} \tag{2}$$

Modelo Bayesiano

En procesamiento de señales basado en estadística, las señales observadas $z \in \mathcal{Z}$ y las no observadas $x \in \mathcal{X}$ son consideradas como una variable aleatoria teniendo una función de probabilidad en un dominio de muestreo.

Usando el teorema de Bayes podemos escribir una ecuación para la probabilidad posterior de los datos observados y los no observados, dada una probabilidad previa $p(x)$.

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)\, p(x)}{p(z)} \tag{3}$$

Funciones generadoras de probabilidad (transformada Z)

Las *funciones generadoras de probabilidad* son usadas en estadística para evaluar la esperanza de una variable aleatoria discreta.

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = E(s^X) \tag{4}$$

$$G_X^{(r)}(1) = E[(X)(X-1)\cdots(X-r+1)] \tag{5}$$

Ejemplo : Variable aleatoria de Poisson

$$X \sim Poisson(\lambda) \tag{6}$$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \, e^{-k} \, s^k = e^{\lambda\,(s-1)} \tag{7}$$

Propiedades de la función generadora de probabilidad

Definition (Superposición)

Sean $x_1, \ldots, x_n$, n variables aleatorias discretas con f.g.p.s $G_{x_1}(s), \ldots, G_{x_n}(s)$ repectivamente

$$G_{x_1+\cdots+x_n}(s) = G_{x_1}(s) \cdots G_{x_n}(s) \tag{8}$$

Ejemplo : Suma de n variables aleatorias de Poisson.

$$x_i \sim Poisson(\lambda_i) \qquad G_{X_i}(s) = e^{\lambda_i(s-1)} \tag{9}$$

$$G_{x_1+\cdots+x_N}(s) = \prod_{i=1}^{N} e^{\lambda_i(s-1)} \tag{10}$$

$$= e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(s-1)} \tag{11}$$

Proceso espacial de Poisson

Definition (Proceso espacial de Poisson)

Un procesos puntuales espacio-temporal de Poisson $N(A)$ es una colección aleatoria de puntos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, donde cada punto corresponde al tiempo y posición en $\mathbb{R}^N$ de un evento, y el número de puntos en dos regiones distintas es $N(A) = N(A_1) + N(A_2)$.

$$P(M_t = m|\Lambda(A,t)) = \Lambda(A,t)^m \frac{e^{-\Lambda(A,t)}}{m!} \tag{12}$$

Con

$$\Lambda(A,t) = \int_A \lambda(z|x_i)\, dz \tag{13}$$

Funcional generador de probabilidad

Definition (Funcional generador de probabilidad)

Sea $j(x_1, \ldots, x_n)$ una densidad en N y h^X una serie de potencia en una función $h(x)$, entonces el funcional generador de probabilidad $G[h]$ se denota como:

$$G[h] \triangleq \int h^X p(X)\delta X \tag{14}$$

$$= p(\emptyset) + \int h(x_1)j(x_1)dx_1 + \frac{1}{2}\int h(x_1)h(x_2)j(x_1, x_2)dx_1 dx_2 + \ldots \tag{15}$$

Estimación de superposición de procesos espaciales de Poisson I

El funcional generador de probabilidad del proceso espacial de Poisson con intensidad se escribe como:

$$G[h|x] = e^{\lambda(x)(p_x[g]-1)} \tag{16}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(x_i)(p_{x_i}[h]-1)} \tag{17}$$

Agregando ruido distribuido espacialmente como un proceso de Poisson con parámetro λ_c, el funcional generador de probabilidad se escribe:

$$G[h|x] = e^{\lambda(x)(p_x[h]-1)}\, e^{\lambda_c(c[h]-1)} \tag{18}$$

Estimación de superposición de procesos espaciales de Poisson II

Derivando con respecto a $h(x)$ y evaluando en una región en torno a 1, se obtiene la distribución condicional de los n puntos:

$$p(Z|X) = \frac{\exp\left(-\lambda(A)\right)}{m!} \prod_{i=1}^{m} \lambda(z_i|X) \tag{19}$$

$$= \frac{\exp\left(-\lambda(A)\right)}{m!} \prod_{i=1}^{m} \left[\lambda_c + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(z_i|x_j)\right] \tag{20}$$

Ejemplo I

En este ejemplo, un hidrófono de 10 canales recibe mediciones de ultrasonido. Una señal conocidad es propagada en el aire y la energia acústica recibida es representada por la respuesta compleja de los sensores. Las mediciones acústicas corresponden a aquellas muestras cuyo valor es mas alto que la varianza de la señal, y luego se agrupan en intervalos.

El rango se representa como una función de cada medición del tiempo de retardo τ. El método de Monte Carlo se usa para estimar el rango de cada objeto. El rango se calcula como $r = c * \tau + w$, donde $c = 330[m/s]$ es la velocidad de propagación del ultrasonido en el aire y $w \sim \mathcal{N}(0, 1e-6)$ corresponde a ruido blanco Gaussiano.

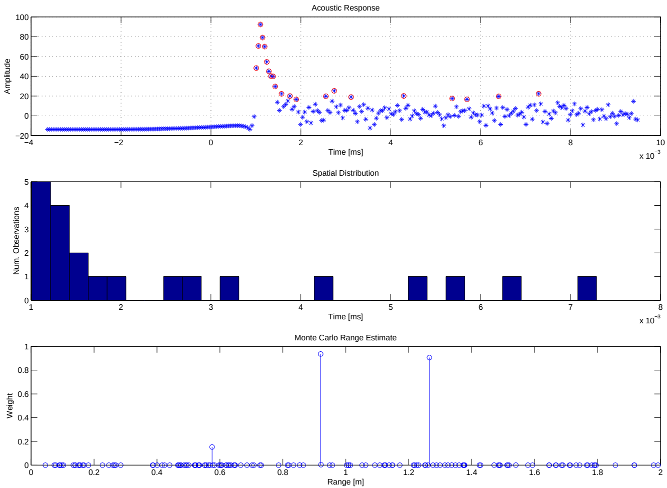

Figure: Multi-Channel Acoustic Data (Channel 1)

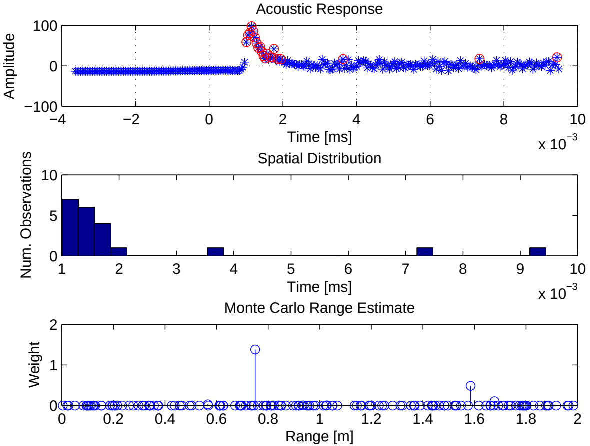

Figure: Multi-Channel Acoustic Data (Channel 10)

Agradecimientos

Agradecimentos a Industrial Research Limited (IRL) por los datos usados y a los organizadores de Semacus 2008.